doi: 10.15503/onis2018.295.302

Rola języka w rozwoju myślenia matematycznego. Ujęcie kognitywne

Aneta Katarzyna Brzezińska-Gębicka
Zakład Wczesnej Edukacji i Kształcenia Nauczycieli
Wydział Pedagogiczny, Uniwersytet Warszawski
ul. Mokotowska 16/20, 00-561 Warszawa, Polska
E-mail: brzezinskaaneta@vp.pl

Abstrakt

Teza. W pedagogice i psychologii badacze skupiają uwagę na społeczno-kulturowych aspektach uczenia się i nauczania. Wielu autorów porusza kwestie językowe w kształtowaniu myślenia matematycznego. Brak w literaturze sprecyzowanych definicji, istnieje wiele odrębnie funkcjonujących stanowisk co do roli języka w rozwoju myślenia matematycznego. Próbą integracji treści jest analiza tematu w ujęciu kognitywnym.

Omówione koncepcje. Podstawą interpretacji jest lingwistyka kognitywna. Przyjmuje, że poznanie matematyczne jest osadzone w kulturze z dwojakich przyczyn. Po pierwsze, myślenie matematyczne rozwija się dzięki mechanizmowi metaforyzacji. Po drugie, matematyka jest rodzajem instruktażu przekazywanego dzięki imitacji oraz w wyniku interakcji społecznych.

Wyniki i wnioski. Język jest katalizatorem matematycznego myślenia. Matematyka to proces dziedziczenia kulturowego. Propozycja kognitywna może być traktowana w kategoriach wskazówek dydaktycznych. Sama istotność roli języka jest jednak niewystarczającą, istnieje potrzeba badań nad tym jak uczyć języka, aby stał się on efektywnym narzędziem w procesie kształtowania myślenia matematycznego.

Oryginalność/wartość poznawcza podejścia. Analiza teoretyczna ukazuje problem konstruowania odpowiedniego języka przyczyniającego się do efektywniejszego poznania matematycznego. Autorka dostrzega tendencję do redukcji pojęcia myślenia matematycznego do zdolności matematycznych oraz degradacji języka matematyki i utożsamianie go z językiem edukacji matematycznej.

Słowa kluczowe: edukacja matematyczna, myślenie matematyczne, konstruktywizm społeczny, lingwistyka kognitywna, imitacja, metafory

The Role of the Language in the Development of Mathematical Thinking. A Cognitive Approach

Abstract

Thesis. Researchers in the fields of pedagogy and psychology focus on the social and cultural aspects of learning and teaching. Many authors raise the language issues in shaping mathematical thinking. There are no precise definitions in the literature; there are many separately functioning opinions with regard to the role of the language in the development of mathematical thinking. An analysis of the issue in the cognitive approach is an attempt at the integration of the contents.

Discussed concepts. The interpretation basis is cognitive linguistics. I assume that mathematical cognition is rooted in culture, for two reasons. Firstly, mathematical cognition develops thanks to the mechanism of metaphorization. Secondly, Mathematics is a type of instruction, provided thanks to imitation and as a result of social interactions.

Findings and conclusions. Language is a catalyser of mathematical thinking. Mathematics is a process of cultural inheritance. The cognitive approach may be treated in terms of didactic guidelines. However, the very significance of the role of language is not insufficient, there is a need for research on how to teach a language so it becomes an effective tool in the process of shaping mathematical thinking.

The approach originality/cognitive value. A theoretical analysis shows the problem of constructing an appropriate language contributing to a more efficient mathematical cognition. The author discerns the tendency to reduce the notion of mathematical thinking to the mathematical abilities and degradation of the language of mathematics, and equating it with the language of the mathematical education.

Key words: mathematics education, mathematical thinking, social constructivism, cognitive linguistics, imitation, metaphors

Myślenie matematyczne – trudności definicyjne

Lektura literatury pedagogicznej nie dostarcza pełnej odpowiedzi na pytanie czym jest myślenie matematyczne. Zofia Krygowska, autorka czynnościowego nauczania matematyki, w *Zarysie dydaktyki matematyki* opisuje najważniejsze aspekty działalności matematycznej (1979). Mirosław Dąbrowski akcentuje dostrzeganie struktur i zależności (2007). Jedynie Dorota Klus-Stańska i Alina Kalinowska tworzą definicję myślenia matematycznego w opozycji do tzw. „bezmyślności matematycznej" (2005, s. 17). Owa bezmyślność nie jest zdaniem autorek niekompetencją w dziedzinie matematyki. Jest raczej „niezdolnością do wyjścia poza mechaniczne techniki obliczeniowe, postrzegane jako izolowane sprawności oraz nieumiejętnością konstruowania samodzielnie strategii rozwiązania" (Klus-Stańska i Kalinowska, 2005, s. 19). Samo myślenie matematyczne to „zespół podejmowanych samodzielnie czynności umysłowych polegających na: (1) rozwiązywaniu zadań i innych problemów matematycznych (logiczna analiza treści, jej identyfikacja i świadomy wybór strategii rozwiązania), (2) poszukiwaniu tych problemów, czyli dostrzeganiu nowych relacji matematycznych i skłonności do matematyzacji rzeczywistości"(2005, s.19).

Niewykluczone, że ów stan spowodowany jest przez zrzucenie ciężaru definicyjnego na filozofię oraz samą matematykę. Najznamienitsi przedstawiciele wyżej wymienionych dyscyplin naukowych będąc dalekimi od definiowania pojęcia są mu bliżsi niż pedagodzy szukający wskaźników. Pytanie tylko, czy filozofia powinna (i chce) pełnić funkcję doradczą względem pedagogiki? Czy pedagogika nie podoła refleksji na temat myślenia matematycznego, nie redukując go do zdolności matematycznych?

Analiza tekstów klasyków filozofii i matematyki: Rene Descartesa (2004), George Polya (2009), Hansa Freudenthala (1973) oraz wymienionych w początkowej części artykułu pedagogów i dydaktyków pozwala jednak na wyłonienie czynników, które mogłyby stanowić pewien przejaw myślenia matematycznego. Wymienię wśród nich: umiejętność dostrzegania zależności, badanie struktur, wyciąganie wniosków, eksperymentowanie, rozumowanie przez analogię, rozwiązywanie problemów, twórczość i samodzielność. Wyrażeniami synonimicznymi do matematycznego myślenia byłyby wyrażenia: myślenie logiczne, myślenie algorytmiczne, myślenie twórcze oraz myślenie abstrakcyjne.

Z powyższego opisu wyłania się obraz ucznia ciekawego świata, badającego, poszukującego i nade wszystko samodzielnego. Tymczasem badania naukowe (Dąbrowski, 2013) ukazują zgoła inny obraz rzeczywistości. Szkolna matematyka koncentruje się na rozwoju umiejętności rachunkowych oraz przygotowaniu egzaminacyjnym. Matematyka redukowana jest do nauki o liczbach i procedurach korzystania z tych liczb. Nie jest to zjawisko nowe bowiem precyzyjnie opisane przez wspomnianą już Z. Krygowską, H. Freudenthala oraz G. Polya. Tę sytuację trafnie opisuje cytowany przez Z. Krygowską Ivan Andronow, którego słowa nie straciły na aktualności: „(…) dotychczas staraliśmy się dawać młodzieży wiele różnych kluczy do różnych zamków; dziś odwrotnie: poszukujemy niewielu wytrychów, którymi można by otwierać wszystkie drzwi." (1979, s. 10).

Matematyka jako zjawisko kulturowe

Jednym z mitów nawiązujących do myślenia matematycznego jest mit ekskluzywności matematyki (Dorota Klus-Stańska i Marzena Nowicka, 2005, s. 169). W tej perspektywie matematyka staje się nauką dla wybrańców: osób uzdolnionych, białych, bogatych, mężczyzn, itp. (Lucyna Kopciewicz, 2012). Twórczość postrzegana jest jako najwyższy poziom wtajemniczenia matematycznego. Uczeń rozpoczyna edukację od algorytmów i zadań prostych, po czym zmierza ku samodzielnemu rozwiązywaniu zadań prawdziwie matematycznych. Ekskluzywność rodzi elitarność wiedzy. Przenosząc mit na grunt filozoficzny, podążając za Paulem Ernestem (1991), nasuwa się wniosek, że matematyka jest nauczana w duchu funkcjonalistyczno-konserwatywnym. Staje się zbiorem „twierdzeń, procedur, wzorów (…) i technik obliczeniowych" (Ernest, 1991, s. 142) nauczanych przez transmisję wiedzy. Sukces jest uwarunkowany systematyczną, indywidualną pracą pod kierunkiem nauczyciela. Wspomniane w początkowej części artykułu przejawy myślenia matematycznego nie są (i nie mogą być) w powyższym systemie obecne.

XX wiek przynosi nowe spojrzenie na edukację. W pedagogice uwidacznia się aspekt społeczno-kulturowy jako czynnik nie tyle determinujący co kształtujący proces uczenia się i nauczania. Konstruktywizm społeczny wysuwa postulat nieobiektywnej rzeczywistości konstruowanej w wyniku interakcji. Jean Piaget i Lew Wygotsky – to uczeni, którzy prezentują ów pogląd w psychologii i pedagogice. J. Piaget dostrzega korelację między określonymi typami i stadiami rozwoju mowy a zmianami w obrębie myślenia (2005). Dziecięca logika wyrasta na gruncie egocentryzmu myślenia dziecka oraz życia społecznego. Zbieżne w wielu punktach badania prowadził L. Wygotsky. Twórca pojęcia strefy najbliższego rozwoju zaznacza, że język i myślenie odgrywają główną rolę w procesie poznania (1989). Rosyjski uczony podkreśla społeczny charakter nauczania. Czynny udział dorosłych osób i stawianie dziecku wyzwań ze strefy najbliższego rozwoju gwarantuje progres. L. Wygotsky stawiał postulat współpracy rówieśniczej (wiedza konstruowana jest w działaniu społecznym). W powyższym ujęciu procesu uczenia się i nauczania rola języka staje się decydującą. Tradycyjna szkoła marginalizuje, o ile nie pomija wpływu języka na rozwój matematycznego myślenia. Język, z jakim obcują uczniowie, ogranicza się do zadań zawartych w podręcznikach i zeszytach ćwiczeń oraz do poleceń i uwag nauczyciela (Dąbrowski, 2013).

Jak widać, w refleksji nad edukacją matematyczną nie sposób pominąć procesu komunikacji i interakcji społecznych. Odpowiednim punktem odniesienia do powyższych zagadnień jest w naszym ujęciu lingwistyka kognitywna. Przyjrzyjmy się zatem bliżej jej aspektom i spróbujmy zinterpretować ją w kategoriach wskazówek dydaktycznych.

Językoznawstwo kognitywne a myślenie matematyczne

Kognitywistyka zajmuje się badaniem procesów umysłowo-poznawczych. Zagadnieniami będącymi w centrum uwagi kognitywistów są: pamięć, język, inteligencja, komunikacja i percepcja. Kognitywistyka czerpie wiedzę z psychologii poznawczej, antropologii, językoznawstwa, socjologii, informatyki oraz filozofii. Ze względu na swą interdyscyplinarność jest interesującą propozycją spojrzenia na rolę języka w kształtowaniu myślenia matematycznego.

Językoznawstwo kognitywne plasuje się w nurcie językoznawstwa funkcjonalnego powstałego w opozycji do językoznawstwa formalnego. Generatywizm Noama Chomsky'ego szybko stał się paradygmatem o ile nie jedynym wyznacznikiem kierunku wszelkich badań językoznawczych. Językoznawstwo generatywne opisuje reguły rządzące kompetencjami językowymi. Zakłada, że język daje się opisać przy użyciu skończonego zbioru reguł (Chomsky, 1982). Skupienie na regułach gramatycznych, syntaktyce i semantyce stało się kontrargumentem kognitywistów, którzy koncentrowali się na aspekcie komunikacyjnym języka. Można wiele zarzucić językoznawstwu kognitywnemu (brak wyszczególnionych czynników poznawczych, braki definicyjne), jednak nie ulega wątpliwości, że uwypuklenie społeczno-kulturowego aspektu języka czyni teorię kognitywną bliższą badaniu procesów poznawczych. W ujęciu kognitywnym *clou* języka stanowią metafory. Twórcami teorii są amerykański językoznawca George Lakoff i filozof Mark Johnson, autorzy książki *Metafory w naszym życiu*. Klasycznie, metafory rozumiane są jako środek stylistyczny. W językoznawstwie kognitywnym metafory to struktury poznawcze pozwalające pojmować to, co abstrakcyjne, przez pojęcia odwołujące do konkretu (Lakoff i Johnson, 2011). Język bowiem nie działa algorytmicznie, nie jest też pochodną modułu, ale tworem umysłu ucieleśnionego. Ludzie nie dysponują gotowymi zbiorami znaczeń i reguł. Niemniej jednak posiadają umysł ucieleśniony, który pozwala na kreowanie pojęć, kształtowanie i nadawanie znaczeń. Formalna gramatyka nie jest w stanie opisać naszych struktur poznawczych bowiem są one kształtowane dzięki kontaktowi ze światem.

Ów kontakt pozwala tworzyć system pojęć konkretnych, te zaś, przy pomocy złożonych mechanizmów poznawczych, są fundamentem pojęć abstrakcyjnych.

Metafory pozwalają nam „rozumieć i doświadczać pewnego rodzaju rzeczy w terminach innej rzeczy" (Lakoff i Johnson, 2011, s. 31). Bartosz Brożek i Mateusz Hohol przejrzyście tłumaczą ów system przez metaforę proponowaną przez Lakoffa i Johnsona *argumentowanie to wojna*. Dlaczego? Bowiem: „zbijamy argumenty przeciwnika, obalamy twierdzenia, pokonujemy dyskutanta, bronimy swoich tez, korzystamy ze strategii argumentacyjnej, kładziemy na łopatki adwersarza" (2014, s. 92). Powyższy przykład pokazuje, że widzieć coś poza metaforą można jedynie posługując się inną metaforą. Metafory zatem są podstawą myślenia abstrakcyjnego – a więc i myślenia matematycznego. „W takim ujęciu zdolności matematyczne nie są wynikiem działania pewnego modułu [co mogłaby sugerować koncepcja gramatyki generatywnej Noama Chomsky'ego], ale wyrastają z codziennych doświadczeń, takich jak orientacja ciała względem przedmiotów, percepcja relacji przestrzennych, postrzeganie ciał w ruchu, rozmieszczenie przedmiotów w przestrzeni, grupowanie ich, posługiwanie się zapisem symbolicznym, itd."(Brożek i Hohol, 2014, s. 100-101). Warto zaznaczyć, że koncepcja kognitywistów spotyka się z oporem niektórych filozofów i matematyków. W polskiej nauce wymienić należy postać Jerzego Pogonowskiego (2011) oraz Józefa Życińskiego (2013). Jednakże, kognitywistyka jest pewnym tropem, który matematyka winna podjąć. Jest to wskazówka co do osadzenia matematyki w kulturze.

Imitacja i matematyka

B. Brożek i M. Hohol w swej książce *Umysł matematyczny* idą o krok dalej niż dotychczasowa kognitywistyka. Stawiają tezę, że umysł ludzki jest ucieleśniony i równocześnie osadzony w kulturze i interakcjach społecznych (2014, s.117). Piszą, że ludzie nie mają wrodzonych zdolności matematycznych. W ramach genetycznego wyposażenia dysponują pakietem zdolności protomatematycznych do których autorzy zaliczają: szacowanie, subitację oraz liczenie. Ostatni z wymienionych komponentów genetycznie posiadamy w niewielkim zakresie. Doskonalenie liczenia wymaga bowiem instruktażu. Nie możemy zatem mówić o synonimiczności pojęcia zdolności protomatematycznych i myślenia matematycznego. Liczne badania dowodzą, że umiejętnością szacowania i subitacji biegle posługuje się wiele gatunków zwierząt. Nie ma jednak dowodów na istnienie myślenia matematycznego w świecie zwierząt. Według B. Brożka i M. Hohola ludzie stali się prawdziwymi matematykami w drodze ewolucji kulturowej, w której znaczącą rolę odegrał język. Fundamentem tejże ewolucji jest imitacja. Jest to zdolność poznawcza, kopiowanie sposobu działania jednostki, ale i celu działania. Co prawda zauważamy naśladownictwo w świecie zwierząt, ale jak przekonują autorzy *Matematycznego Umysłu* prowadzi ono do biegłości jedynie w obszarze danego zachowania. Ludzi zaś cechuje zdolność do precyzyjnej imitacji. Co następuje, matematyka przekazywana jest (jako twór kultury) z pokolenia na pokolenia dzięki imitacji. Matematyki nie zrodziły geny, lecz ludzkie potrzeby. Jest ona procesem dziedziczenia kulturowego. W podobnym tonie wypowiada się Michael Tomasello, który w swych pracach wskazuje na ludzką zdolność, a nawet tendencję do współpracy (w świecie zwierząt nie ma altruizmu i bezinteresowności). Zdaniem autora wszystkie najbardziej imponujące osiągnięcia ludzkości (technologia, symbole, język, matematyka) nie są następstwem działań jednostek, ale ich interakcji (2009, s. 15-16).

Skąd jednakże precyzyjność i stabilność matematyki? To cechy, których nie zwykło przypisywać się tworom kultury. Kognitywiści argumentują, że za wspomnianą stabilność i precyzję odpowiedzialne są opisane wyżej mechanizmy metaforyzacji, imitacji oraz zapis symboliczny. Kwestia ta nie pozostaje jednak rozstrzygnięta, a jej problematyczność pojawia się m.in. w pracach Michała Hellera (1998, s. 3-14).

Podsumowując, myślenie matematyczne w ujęciu kognitywnym kształtuje się dwupłaszczyznowo. Po pierwsze, jest wynikiem działania mechanizmu metaforyzacji, który prowadzi od konkretnych do abstrakcyjnych pojęć. Po drugie, jest rezultatem imitacji, czyli swoistego instruktażu przekazywanego z pokolenia na pokolenie. I w jednym, i drugim przypadku czynnikiem warunkującym powstanie myślenia matematycznego jest język.

Wskazówki dydaktyczne? Konkluzja

Rola języka w kształtowaniu myślenia matematycznego zdaje się klarowną. Jest to zjawisko szczegółowo opisane w literaturze. Lingwistyka kognitywna nie jest w tym odosobniona, lecz stanowi próbę integracji treści z poszczególnych terenów badawczych. Zatem, jakie wnioski płyną z powyższych rozważań dla dydaktyki matematyki? Esencjonalnie zarysowuje się reprezentacja enaktywna. Pedagodzy lękają się jej i pochopnie (przedwcześnie) sięgają po symbole. Jeżeli jednak mechanizm metaforyzacji istnieje i warunkuje kształtowanie się myślenia matematycznego, to jest to czynnik przemawiający za pracą na konkretnym materiale (w przypadku dzieci w wieku przedszkolnym i wczesnoszkolnym mowa o namacalnej konkretności, czyli o przedmiotach, którymi mogą manipulować, o ilustracjach które mogą tworzyć lub przekształcać. Starsi uczniowie konkretu doświadczą w zadaniach problemowych, nawiązujących do otaczającej ich rzeczywistości i odwołujących do własnego doświadczenia). Nauczycielski pęd do formalizmu i zbyt wczesne zanurzenie uczniów w świecie symboli mogą wypaczyć istotę matematyki. Reprezentacja enaktywna jest bliska ludzkiemu systemowi kształtowaniu pojęć, powinna więc stanowić kamień węgielny pod tworzenie matematycznego umysłu.

Po drugie, kognitywiści podkreślają rolę współpracy. Z natury ludzie są istotami kooperującymi i w ramach kultury tworzą naukę. Należałoby odejść od indywidualnej formy nauczania na rzecz pracy zespołowej. Grupa otwiera nowe możliwości: wymiany doświadczeń, weryfikacji pomysłów, spojrzenia na problem z innej perspektywy, etc. Niektórzy uczeni podważają efektywność pracy grupowej. W planowaniu procesu dydaktyczno-wychowawczego należy mieć na uwadze różnice indywidualne i samą indywidualizację nauczania. Propozycja kognitywna pokazuje pewną alternatywę, która nie powinna stać w opozycji do pracy indywidualnej. Należy traktować ją w kategoriach jednego z możliwych sposobów indywidualizowania pracy z uczniami (którzy mogą, zależnie od wielu czynników, preferować pracę indywidualną lub grupową).

Po trzecie, połączenie pracy zespołowej z działaniem zaangażowanego nauczyciela. Z kognitywistycznych rozważań wynika, że matematyki uczymy się w drodze imitacji. Oczywiście, bierne naśladownictwo nasuwa nam skojarzenie z tradycyjnym modelem nauczania. Należy jednakże zastanowić się, czy aby na pewno imitacja jest li tylko kopiowaniem, wdrukowywaniem pewnego schematu postępowania? Zważywszy na towarzyszący owemu procesowi język, należy zanegować powyższe przypuszczenie. Imitacja stawia postulat aktywnego uczenia, w procesie którego uczeń zadaje pytania, dyskutuje, argumentuje, uzasadnia, neguje.

Nie są to jednak nowe wskazówki. W Polsce już w latach 60. pisała o tym wymieniana w początkowej części artykułu Z. Krygowska. Niemniej jednak same kreowanie powyższych sytuacji jest niewystarczającym. Progresywizm pedagogiczny zakłada, że rola nauczyciela w procesie uczenia się i nauczania powinna być mocno ograniczona, zaś dzieciom do nauki wystarczy odpowiednio zorganizowane środowisko i możliwość swobodnego operowania językiem. Badania dowodzą, że to za mało. Brytyjscy badacze przeprowadzili eksperymenty mające posłużyć jako dowód, że wykreowanie sytuacji do swobodnego używania języka sprzyja efektywnemu rozwiązywaniu problemów matematycznych. Nakreślili ideę tzw. „*exploratory talk*", która miała być używana przez uczniów i nauczyciela (N. Mercer i C. Sams, 2006). Pomysł zakładał uczestnictwo nauczyciela pytającego, używającego właściwych słów, słuchającego, etc. Dzieciom owego zbioru reguł, z oczywistych przyczyn (niemożność zaobserwowania ewentualnego progresu), nie przedstawiono. W związku z powyższym badacze dostrzegli problem. Praca w grupie może być kierunkiem pracy, ale dzieci należy nauczyć dyskutować, używania języka, uwrażliwić na interpretację pytań. Otwarte pytanie jest bardziej rozwojowe od zamkniętego – problem w tym, że uczniowie nie rozumieli jego treści. Do *spectrum* problemów natury językowej dołączyły naturalne procesy grupowe wyłanianie się lidera, kozła ofiarnego, itp. Widać, że sama możliwość używania języka na lekcji matematyki to oczywisty postulat, który powinien być punktem wyjścia do nauki języka edukacji matematycznej i nauki języka matematyki, gdyż w przekonaniu autorki nie są one językami synonimicznymi (język matematyki jako formalizm, język edukacji matematycznej jako konkretny). Niepokojący jest fakt, że wielu badaczy spłaszcza język matematyki i edukacji matematycznej, ograniczając go do słów kluczowych, najczęściej wyrażających liczby lub jedno z podstawowych działań arytmetycznych (M. I. Susperreguy i P. E. Davies-Kean, 2016). Czy ograniczając pulę badanych zwrotów uczniów, nauczycieli i rodziców do wyrazów przypisanych konkretnym działom matematyki uczony ma sposobność badać myślenie matematyczne? Zdaje się ono dalece wykraczać poza ramy świata *stricte* liczbowego.

Analiza teoretyczna ukazuje problem konstruowania odpowiedniego języka przyczyniającego się do efektywniejszego poznania matematycznego. Samo używanie żywego języka na lekcjach matematyki, możliwość dyskutowania, wymieniania poglądów, wspólnego weryfikowania rozwiązań jest *novum* dla polskiego ucznia przywykłego do samodzielnego rozwiązywania zadań według wzoru podanego przez nauczyciela. Niemniej jednak język w nauczaniu matematyki pozostaje aktualnym problemem badawczym wymagającym dalszych analiz.

Bibliografia

1. Brożek B., Hohol M. (2014). *Umysł matematyczny.* Kraków: Copernicus Center Press.
2. Chomsky N. (1982). *Zagadnienia teorii składni.* Wrocław: Ossolineum.
3. Dąbrowski M. (2007). *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów.* Warszawa: Centralna Komisja Egzaminacyjna.
4. Dąbrowski M. (2013). *(Za) trudne, bo trzeba myśleć ? O efektach nauczania matematyki na I etapie kształcenia.* Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.
5. Ernest P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Milton Keynes: Routledge Falmer.
6. Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
7. Heller M. (1998). Czy świat jest matematyczny ? *Zagadnienia Filozoficzne w Nauce XXII 1998*, s. 3-14.
8. Kartezjusz, (2004). *Medytacje o filozofii pierwszej.* Kraków: Zielona Sowa.
9. Klus-Stańska D., Kalinowska A. (2005). *Rozwijanie myślenia matematycznego młodszych uczniów.* Warszawa: Wydawnictwo Akademickie „ŻAK".
10. Klus-Stańska D., Nowicka M. (2005). *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej.* Warszawa: Wydawnictwa Szkole i Pedagogiczne.
11. Kopciewicz L. (2012). *Równa szkoła. Matematyka, władza i pole wytwarzania kultury.* Warszawa: Engram.
12. Krygowska Z. (1979). *Zarys dydaktyki matematyki. Tom 1.* Warszawa: WSzP.
13. Lakoff G., Johnson M. (2011). *Metafory w naszym życiu.* Warszawa: Aletheia.
14. Mercer N., Sams C. (2006). Teaching Children How to Use Language to Solve Maths Problems. *Early Education and Development*, Vol. 20, No.6, s. 507-526.
15. Piaget J. (2005). *Mowa i myślenie dziecka*. Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
16. Pogonowski J. (2011). Geneza matematyki wedle kognitywistów. *Investigationes Linguisticae, XXIII,* s. 106-14.
17. Polya G. (2009). *Jak to rozwiązać* ? Warszawa: Wydawnictwo Naukowe PWN.
18. Susperguy M. I., Davies-Kean P. E. (2016). Maternal Math Talk in the Home and Math Skills in Preschool Children. *Early Education And Development*, Vol.27, No. 6., s. 841-855.
19. Tomasello M. (2009). *Why We Cooperate.* Cambridge: The MIT Press.
20. Wygotsky L. (1989). *Myślenie i mowa*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
21. Życiński J. (2013). *Świat matematyki i jej materialnych cieni.* Kraków: Copernicus Center Press.